COORDENADAS POLARES

MARCELO DIAS PASSOS

Resumo. Estas notas foram digitadas durante os cursos de MATB34 (Geometria Analítica e Álgebra Vetorial) em 2024.

As coordenadas dadas aos pontos de um plano propiciaram uma "tradução" da Geometria – seus objetos, suas proposições e etc – em números, pares de números e equações manipulados algebricamente. Até este momento usamos as chamadas **coordenadas retangulares** ou **cartesianas**, que posicionaram cada ponto em relação aos eixos fixados. Os módulos das coordenadas cartesianas de um ponto são as distâncias aos eixos coordenados (cartesianos). Se sabemos essas distâncias, podemos decidir os sinais das coordenadas segundo o posicionamento do pontos com relação a esses eixos: positivo ou negativo se à direita ou à esquerda do eixo Oy, se acima ou abaixo do eixo Ox. Num sistema de coordenadas polares, vamos posicionar cada ponto com relação à origem, focando na distância do ponto à origem e na reta determinada pelo ponto e origem.

Definição 1. *Seja $\Sigma = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ um sistema de coordenadas ortogonal onde $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ tem orientação positiva.*[1] *Dado o ponto $P = (x, y)_\Sigma$, diremos que P tem **raio polar (ou raio vetor)** r e **ângulo polar (ou ângulo vetorial)** θ se, e somente se, $r, \theta \in \mathbb{R}$,*

$$x = r \cdot \cos\theta \qquad e \qquad y = r \cdot \operatorname{sen}\theta \ .$$

*Escreveremos $P = (r, \theta)_p$ para dizer que P tem **coordenadas polares** r **e** θ.*

*A origem será chamada de **pólo**. A semirreta $\{(x, 0) \colon x \geq 0\}$ será chamada de **semieixo polar***

Se $\vec{e_\theta} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, então $\vec{e_\theta}$ é o vetor $\vec{\imath}$ "rotacionado"em θ radianos (ou graus, conforme a escolha para apresentar as coordenadas polares) no sentido anti-horário. Neste caso $\overrightarrow{OP} = r \cdot \vec{e_\theta}$.

Exemplo 1. *Para qualquer $\theta \in \mathbb{R}$, a origem tem coordenadas polares $(0, \theta)$. Portanto, o pólo tem **infinitas** coordenadas polares.*

Exemplo 2. *O ponto $P = (1, 1)$ tem coordenadas polares? Procuremos $r, \theta \in \mathbb{R}$ tais que $1 = r \cdot \cos\theta$ e $1 = r \cdot \operatorname{sen}\theta$. Dado que $r \neq 0$, podemos escrever $\cos\theta = \frac{1}{r}$ e $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{r}$. Logo*

$$1 = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 2 \cdot \left(\frac{1}{r}\right)^2 = \frac{2}{r^2} \ .$$

Portanto $r^2 = 2$. Se tomamos $r = \sqrt{2}$, devemos achar θ tal que $\cos\theta = \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Basta tomarmos $\theta = \frac{\pi}{4}$ para concluirmos que $P = \left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)_p$.

Lema 1. *Se $P = (r, \theta)_p$, então $|r| = d(O, P)$.*

Demonstração. Se $P = (r, \theta)_p$, então $x = r \cdot \cos\theta$ e $y = r \cdot \operatorname{sen}\theta$. Daí

$$x^2 + y^2 = r^2 \cdot \cos^2\theta + r^2 \cdot \operatorname{sen}^2\theta = r^2 \ .$$

Portanto $d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{r^2} = |r|$. □

Teorema 2. *Seja P um ponto do plano. Existem $r \geq 0$ e $\theta \in [0, 2\pi[$ tais que $P = (r, \theta)_p$.*

Demonstração. O exemplo 1 mostrou que o pólo admite coordenadas polares. Vamos supor que $P = (x, y) \neq O$. Seja $r = d(O, P)$. Logo $r > 0$. Como $\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1$, existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tal que $\cos\theta = \frac{x}{r}$ e $\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}$. Portanto $P = (r, \theta)_p$. □

Date: 2024.

[1] Diremos que $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ tem orientação positiva quando $\vec{\jmath}$ corresponde a $\vec{\imath}$ rotacionado em $\frac{\pi}{2}$ no sentido anti-horário

Observação 1. *Observando o exemplo 2, concluímos que* $(1,1) = \left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)_p$, *para todo* $k \in \mathbb{Z}$. *Além disso,* $(1,1) = \left(-\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4} + 2l\pi\right)_p$, *para todo* $l \in \mathbb{Z}$. *Portanto,* ***não há unicidade*** *para coordenadas polares, fato este que acontecia nas coordenadas cartesianas!*

Exercício 1. *Determine coordenadas polares para cada um dos pontos:*
(1) $(1,-1)$ *(2)* $(-1,1)$ *(3)* $(0,1)$ *(4)* $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ *(5)* $(2,2)$ *(6)* $(-1,-\sqrt{3})$

Exercício 2. *Sabe-se que* $\alpha = \arccos\frac{2}{\sqrt{7}}$ *e* $\beta = \operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{5}}$. *Determine as coordenadas cartesianas de cada um dos pontos:*

(1) $(1,\alpha)_p$
(2) $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \beta + \pi\right)_p$
(3) $(0,\pi)_p$
(4) $\left(\sqrt{7}, \alpha + \pi\right)_p$
(5) $(2,-\pi)_p$
(6) $\left(-1, \frac{7\pi}{4}\right)_p$
(7) $(2,2\alpha)_p$
(8) $(5,2\beta)_p$
(9) $(1,\alpha+\beta)_p$

Teorema 3. *Se* $P = (r,\theta)_p = (s,\alpha)_p$, *então* $r = s = 0$ *ou existe* $n \in \mathbb{Z}$ *tal que* $r = (-1)^n \cdot s \neq 0$ *e* $\theta = \alpha + n\pi$.

Demonstração. Suponhamos que $P = (r,\theta)_p = (s,\alpha)_p$. Pelo lema 1, induzimos que $|r| = |s|$. Se $r = 0$, então $s = 0$ e $r = s$. Suponhamos que $r \neq 0$. Logo $s \neq 0$.

Estudemos o caso no qual $r = s$. Logo $\cos\theta = \cos\alpha$ e $\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\alpha$. Consequentemente, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\theta = \alpha + 2k\pi$. Se $n = 2k$, observamos que $(-1)^n \cdot s = s = r$ e $\theta = \alpha + n\pi$.

Se $r = -s$, então $\cos\theta = -\cos\alpha = \cos(\alpha + \pi)$ e $\operatorname{sen}\theta = -\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(\alpha + \pi)$. Logo existe $l \in \mathbb{Z}$ tal que $\theta = \alpha + \pi + 2l\pi$. Seja $m = 2l + 1$. Daí $(-1)^m \cdot s = -s = r$ e $\theta = \alpha + m\pi$. □

Exercício 3. *Demonstre a recíproca do teorema anterior.*

Exercício 4. *Suponha que* P *é um ponto diferente do pólo. Mostre que existem* ***únicos*** $r > 0$ *e* $\theta \in [0, 2\pi[$ *tais que* $P = (r,\theta)_p$.

Proposição 4. *Se* $P = (r,\theta)_p$ *e* $Q = (s,\varphi)_p$, *então* $d(P,Q) = \sqrt{r^2 + s^2 - 2rs \cdot \cos(\theta - \varphi)}$.

Demonstração. Se $P = (r,\theta)_p$ e $Q = (s,\varphi)_p$, então $P = (r\cdot\cos\theta, r\cdot\operatorname{sen}\theta)$ e $Q = (s\cdot\cos\varphi, s\cdot\operatorname{sen}\varphi)$. Sendo assim,

$$d(P,Q)^2 = (r\cdot\cos\theta - s\cdot\cos\varphi)^2 + (r\cdot\operatorname{sen}\theta - s\cdot\operatorname{sen}\varphi)^2 =$$
$$= \left(r^2\cdot\cos^2\theta - 2rs\cdot\cos\theta\cdot\cos\varphi + s^2\cdot\cos^2\varphi\right) + \left(r^2\cdot\operatorname{sen}^2\theta - 2rs\cdot\operatorname{sen}\theta\cdot\operatorname{sen}\varphi + s^2\cdot\operatorname{sen}^2\varphi\right) =$$
$$= r^2 + s^2 - 2rs\big(\cos\theta\cdot\cos\varphi + \operatorname{sen}\theta\cdot\operatorname{sen}\varphi\big) = r^2 + s^2 - 2rs\cdot\cos(\theta - \varphi) \ .$$

□

1. Curvas em coordenadas polares

Em sistemas cartesianos temos curvas descritas por equações do tipo

$$F(x,y) = 0 \ .$$

Da mesma maneira como fizemos com retas e cônicas, gostaria da associar equações em coordenadas polares para estas curvas. Em contrapartida podemos analisar quais pontos do plano têm raio e ângulo polares satisfazendo alguma equação.

Tomemos $G\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. A **curva** Γ **de equação polar** $G(r,\theta) = 0$ – situação denotada por $\Gamma\colon G(r,\theta) = 0$ – corresponde aos pontos do plano que admite coordenada polar que a satisfaça. Portanto, para escrever $P \in \Gamma$, devemos procurar algum par de coordenadas polares para P que satisfaça a igualdade requerida.

Exemplo 3. *Tomemos a equação polar* $r = \operatorname{sen}^2\theta$ *ou* $r - \operatorname{sen}^2\theta = 0$. *O ponto* $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)_p$ *está na curva pois* $\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{2} = 1$. *Notamos que* $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)_p = (0,1)$. *O pólo também está na curva pois* $O = (0,0) = (0,0)_p$.

Tomemos $P = (x,y) = (r,\theta)_p \neq O$ *tal que* $r = \operatorname{sen}^2\theta$. *Como* $r > 0$, *deduzimos que* $r = \sqrt{x^2+y^2}$ *e* $\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. *Sendo assim,*

$$r = \operatorname{sen}^2\theta \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \frac{y^2}{x^2+y^2} \Leftrightarrow \left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}} = y^2 \Leftrightarrow \left(x^2+y^2\right)^3 = y^4 \ .$$

E também estabelecemos uma equação cartesiana para a curva.

Exemplo 4. *Fixemos $a \neq 0$ e estudemos a equação polar $r = 2a \cdot \cos\theta$. O pólo está na curva pois $O = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ satisfaz a equação. Tomemos $P = (r,\theta)_p \neq O$ tal que $r = 2a \cdot \cos\theta$. Logo*

$$r = 2a \cdot \cos\theta \Leftrightarrow r^2 = 2ar \cdot \cos\theta \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2ax \Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = a^2 \Leftrightarrow (x-a)^2 + y^2 = a^2 \ .$$

Sendo assim, a curva corresponde a uma circunferência de centro $(a, 0)$ e raio $|a|$.

Exercício 5. *Seja $C = (s,\varphi)_p$, com $s \neq 0$. Determine equação polar para a circunferência de centro C e raio $|s|$.*

Teorema 5. *Para uma curva Γ do plano, Γ é uma reta perpendicular ao vetor $\vec{n} = (\cos\varphi, \operatorname{sen}\varphi)$ se, e somente se, $\Gamma\colon r \cdot \cos(\theta - \varphi) + d = 0$, para algum $d \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Lembramos que Γ é um reta perpendicular ao vetor $\vec{n} = (\cos\varphi, \operatorname{sen}\varphi)$ se, e somente se, existe $d \in \mathbb{R}$ tal que $\Gamma\colon (\cos\varphi)x + (\operatorname{sen}\varphi)y + d = 0$. Tomemos $P = (x,y) = (r,\theta)_p$. Logo

$$X \in \Gamma \Leftrightarrow (\cos\varphi)x + (\operatorname{sen}\varphi)y + d = 0 \Leftrightarrow (\cos\varphi)r \cdot \cos\theta + (\operatorname{sen}\varphi)r \cdot \operatorname{sen}\theta + d = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow r(\cos\varphi \cdot \cos\theta + \operatorname{sen}\varphi \cdot \operatorname{sen}\theta) + d = 0 \Leftrightarrow r \cdot \cos(\theta - \varphi) + d = 0 \ .$$

□

Exercício 6. *Mostre que, se $P = (s,\alpha)_p$ e Γ é a reta de equação polar $r \cdot \cos(\theta - \varphi) + d = 0$, então $d(P,\Gamma) = |s \cdot \cos(\alpha - \varphi) + d|$.*

Exercício 7. *Mostre que a distância do pólo à reta $\Gamma\colon r \cdot \cos(\theta - \varphi) + d = 0$ é $|d|$. Ainda, $P = (-d,\varphi)_p$ é o ponto de Γ mais próximo da origem.*

Exemplo 5 (Cardióide)**.** *Determinemos equação cartesiana para a equação polar $r = a(1 + \cos\theta)$, onde $a \neq 0$.*

Primeiro observamos que o pólo é ponto da curva. Agora suponhamos que $P = (r,\theta)_p \neq O$ tal que $r = a(1 + \cos\theta)$. Sendo assim,

$$r = a(1 + \cos\theta) \Leftrightarrow r^2 = ar + r\cos\theta \Leftrightarrow r^2 - ar\cos\theta = ar \Rightarrow (x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2) \ .$$

Provamos que, se $P = (r,\theta)_p = (x,y)$ e $r = a(1 + \cos\theta)$, então $(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$.

Vejamos que também vale a volta! Suponhamos que $P = (x,y) = (r,\theta)_p \neq 0$ tal que $(x^2+y^2-ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$. Sendo assim,

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2) \Leftrightarrow (r^2 - ar\cos\theta)^2 = a^2r^2 \Leftrightarrow (r - a\cos)^2 = a^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} r - a\cos\theta = a \\ r - a\cos\theta = -a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = a(1 + \cos\theta) \\ r = a(\cos\theta - 1) \end{cases} \ .$$

Se $s = -r$ e $\alpha = \theta + \pi$, então $P = (s,\alpha)_p$. Se $r = a(\cos\theta - 1)$, então

$$a(1 + \cos\alpha) = a(1 - \cos\theta) = -a(\cos\theta - 1) = -r = s \ .$$

Ou seja, P admite coordenadas polares que satisfazem $r = a(1 + \cos\theta)$.